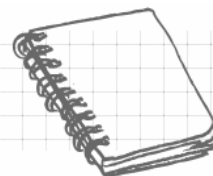




Jak obracać trójkąt, by otrzymać bryłę o największej objętości?

WIADOMOŚCI OGÓLNE



■ Czas trwania zajęć: 40 minut

■ Kontekst w jakim wprowadzono doświadczenie:

Trójkąt o bokach długości: 3cm, 4 cm, 5 cm obrócono o kąt 360° w przestrzeni trójwymiarowej względem osi zawierających poszczególne boki.

■ Potencjalne pytania badawcze:

W którym przypadku otrzymano bryłę o największej objętości - wskaż właściwą twym zdaniem hipotezę:

1. Gdy oś obrotu zawiera bok najkrótszy.
2. Gdy oś obrotu zawiera bok średni.
3. Gdy oś obrotu zawiera bok najdłuższy.

■ Określenie wiedzy i umiejętności wymaganej u uczniów przed przystąpieniem do realizacji zajęć:

Uczeń wie jak powstają bryły obrotowe oraz zna sposób obliczania ich objętości. Ponadto uczeń potrafi rozpoznawać trójkąty prostokątne (tu trójkąt egipski) i obliczać pola trójkątów.

■ Cele osiągnięte z wykorzystaniem doświadczenia:

1. nauczyciela:

- kształcenie wyobraźni przestrzennej związanej z przekształcaniem figury płaskiej na bryłę podczas obrotu,
- wykorzystanie wiadomości z planimetrii do ustalania parametrów pozwalających obliczyć objętość bryły złożonej ze stożków.

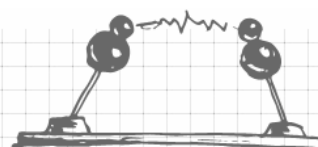
2. uczniów:

- uczeń potrafi ustalić jaka bryła obrotowa powstanie podczas obrotu trójkąta względem wskazanej osi,
- uczeń potrafi obliczać objętość stożka.

■ Pojęcia kluczowe:

- bryły obrotowe,
- stożek,
- promień podstawy i wysokość stożka,
- wysokość trójkąta,
- pole trójkąta,
- pole trójkąta prostokątnego,
- oś obrotu.

DOŚWIADCZENIE



■ Zmienne występujące w doświadczeniu:

- zmienna niezależna: bok, wokół którego obraca się trójkąt,
- zmienna zależna: objętość powstałej bryły,
- zmienna kontrolna: trójkąt, który się obraca.

■ Instrukcja wykonania doświadczenia:

1. Naskicuj każdą z trzech brył, które powstaną podczas obrotu trójkąta względem osi zawierających poszczególne boki.



2. Zobacz filmy: "Jak powstaje stożek 1", "Jak powstaje stożek 2", "Jak powstaje stożek 3".
Dokonaj ewentualnych korekt w swych szkicach.
3. Ustal, jaka bryła powstanie w każdym z przypadków i dopasuj zaproponowane nazwy, wpisując je do tabeli doświadczenia.
4. Ustal parametry: długość promienia podstawy i wysokości dla każdego z trzech przypadków i wpisz do tabeli doświadczenia. Możesz skorzystać ze wskazówki, gdybyś nie wiedziała/nie wiedział jak wyznaczyć promień dla bryły z trzeciego szkicu (odpowiednika filmu "Jak powstaje stożek 3") lub jak policzyć objętość powstałej bryły.
5. Wykonaj obliczenia objętości (wpisz do tabeli) i na podstawie obliczeń zweryfikuj swoją hipotezę.

■ Podsumowania doświadczenia:

Po zweryfikowaniu hipotezy należy przeprowadzić dyskusję wyników. Kluczowy problem (który proponuję najpierw omówić w parach) można sformułować następująco: „Który z parametrów bardziej wpływa na objętość stożka: promień czy wysokość i dlaczego?”. Następnie, po odsłuchaniu ustaleń kilku par (przynajmniej jedna dobra odpowiedź w rozumieniu idei i poprawności argumentacji, ale niekoniecznie precyzji artykulacji), należy przeprowadzić dyskusję na forum klasy. Wniosek proponuję zapisać po poprawnym zredagowaniu.

■ Praca domowa- zadanie do wyboru:

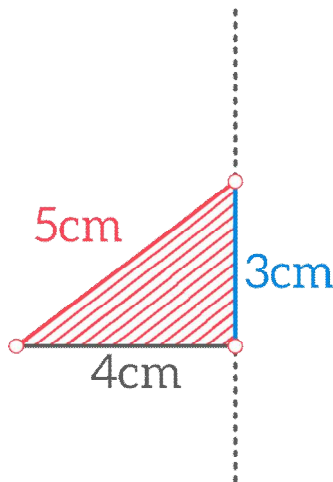
- Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu prostokąta o bokach długości 3 cm i 4 cm względem poszczególnych boków (łatwe).
- Trójkąt o bokach długości: 3 cm, 4 cm, 5 cm obrócono o kąt 360° w przestrzeni trójwymiarowej względem osi zawierających poszczególne boki. W którym przypadku otrzymano bryłę o największym polu powierzchni? (Trudniejsze i bardziej pracochłonne, ale stanowiące naturalną kontynuację procesu badawczego).
- Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu prostokąta o bokach długości 3 cm i 4 cm względem jego przekątnej (bardzo trudne).



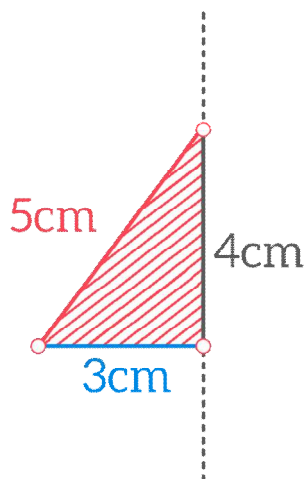


Propozycja dokumentacji przeprowadzenia doświadczenia przez uczniów:

Odpowiednik filmu "Jak powstaje stożek 1":



Odpowiednik filmu "Jak powstaje stożek 2":



Odpowiednik filmu "Jak powstaje stożek 3":

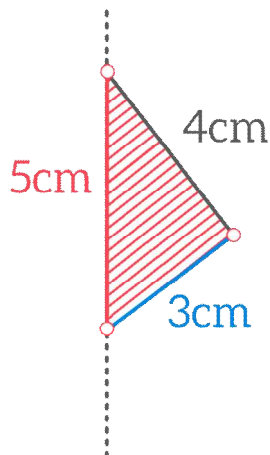
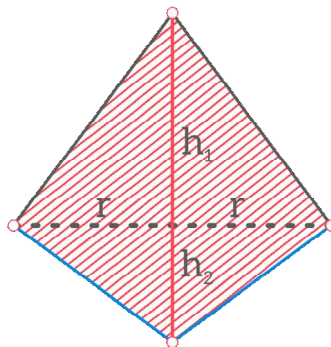


Tabela doświadczenia:

Bryła ze szkicu	Wybierz i wpisz nazwę: <i>stożek o promieniu 3</i> <i>stożek o wysokości 3</i> <i>lub dwustożek</i>	Promień bryły	Wysokość bryły	Objętość bryły
stożek 1				
stożek 2				
„stożek 3”				

Wskazówka dla „duostożka”: Na poniższym rysunku pokazano przekrój osiowy bryły powstałej z obrotu trójkąta wokół najdłuższego boku.



Ta bryła składa się z dwóch stożków: „niebieskiego” i „szarego” (spójrz także na film „Jak powstaje stożek 3”). Są one złączone podstawami, więc obie mają ten sam promień r . Objętość „duostożka” jest sumą objętości stożka „szarego” i „niebieskiego”, więc można ją obliczyć wg wzoru:

$V_d = V_b + V_n$, gdzie V_d - objętość „duostożka”, V_b - objętości stożka „szarego”, V_n - objętości stożka „niebieskiego”.

$$V_d = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (h_1 + h_2)$$

Bez trudu zauważymy, że $h_1 + h_2 = 5$ cm. Pozostaje więc wyznaczyć wspólny dla obu stożków promień r . W tym celu wróćmy do analizy zależności w trójkącie, który obracając się tworzy „duostożek”. Pewnie z trójkątem o bokach 3, 4, 5 już spotkaliście się - to tzw. „trójkąt egipski” - jeden z pierwszych znanych ludzkości trójkątów prostokątnych. Zauważmy, że promień r jest wysokością tego trójkąta odpowiadającą przeciwprostokątnej - jako podstawie. Inną parę: podstawa-wysokość tworzą przyprostokątne. Do wyznaczenia promienia wykorzystamy fakt, że pole prostokąta to stała -



jej wartość nie zależy od wyboru pary podstawa-wysokość do obliczeń. Możemy zatem zapisać równanie (od razu wstawiono do niego liczby określające znane długości odcinków):

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$$

$$5r = 12$$

$$r = 2\frac{2}{5}$$

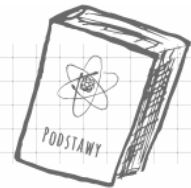
Obliczanie objętości poszczególnych brył:

$$V_{s1} = \frac{1}{3} \pi \cdot \dots^2 \cdot \dots =$$

$$V_{s2} = \frac{1}{3} \pi \cdot \dots^2 \cdot \dots =$$

$$V_{s3} = \frac{1}{3} \pi \cdot \dots^2 \cdot \dots =$$

PODSTAWA PROGRAMOWA



■ Cele, które zostaną osiągnięte w wyniku przeprowadzenia doświadczenia przez nauczyciela i uczniów pod kierunkiem nauczyciela:

a) *wymagania ogólne – cele*

- II Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji: uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretuje pojęcia matematyczne i operuje obiektami matematycznymi.
- III Modelowanie matematyczne: uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji, buduje model matematyczny danej sytuacji.
- IV Użycie i tworzenie strategii: uczeń stosuje strategię jasno wynikającą z treści zadania, tworzy strategię.



- V Rozumowanie i argumentacja: uczeń prowadzi proste rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania.

b) wymagania szczegółowe - treści nauczania

- 11 Bryły: 2) uczeń oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym);
- 10 Figury płaskie: 9) uczeń oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;

BIBLIOGRAFIA



Proponuję, jako wystarczające źródło wiedzy - możliwe do wykorzystania przez uczniów, dowolny podręcznik matematyki do gimnazjum traktujący o objętościach i polach brył obrotowych np.:

1. Matematyka 3. Podręcznik dla gimnazjum. Wydanie 2011. Praca zbiorowa pod redakcją M. Dobrowolskiej.
2. Matematyka. Podręcznik z zadaniami. Gimnazjum klasa II. Małgorzata Świst, Barbara Zielińska. Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro Spółka z o.o., Warszawa 2009.

