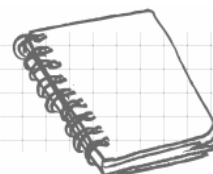




## Podobieństwo. Praktyczne zastosowanie zależności między polami figur podobnych.

### WIADOMOŚCI OGÓLNE



■ Czas trwania zajęć: ok. 40 minut

■ Kontekst w jakim wprowadzono doświadczenie:

Jako uzasadnienie potrzeby wykonania doświadczenia wg przedstawionego planu badawczego zaproponowałem przeprowadzenie krytycznej oceny innego planu – przedstawionego we wstępie do doświadczenia. Proponuję także „niekompletny” plan badawczy (instrukcje doświadczenia), by (niektórzy) uczniowie mieli prawo popełnić ewentualny błąd powiększając pola proporcjonalnie do skali podobieństwa, a nie do jej kwadratu. Dyskusja nad rozwiązaniami powinna doprowadzić do realizacji pierwszego z celów.

■ Potencjalne pytania badawcze:

1. Czy mierniczy dobrze określili pole powierzchni działki Pana Michała?

■ Określenie wiedzy i umiejętności wymaganej u uczniów przed przystąpieniem do realizacji zajęć:

Wystarczające są umiejętności dotyczące przeliczania długości odcinków z wykorzystaniem skali oraz znajomość jednostek pola i umiejętność ich przeliczania. Uczniowie powinni także rozumieć, że działka i jej plan w pewnej skali można uznać jako figury o tym samym kształcie, czyli – podobne.

■ Cele osiągnięte z wykorzystaniem doświadczenia:

1. nauczyciela:



- odkrycie zależności dotyczącej stosunku pól figur podobnych,
- wykorzystanie skali planu/mapy, jako skali podobieństwa figur geometrycznych płaskich, do praktycznego określania pól działek.

## 2. uczniów:

- odkryjesz jaka jest zależność dotycząca pól figur podobnych,
- będziesz umiał określać pola działek z wykorzystaniem ich planu.

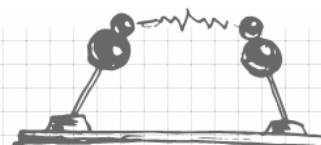
### ■ Pojęcia kluczowe:

- podobieństwo figur,
- skala podobieństwa,
- pola figur podobnych.

### ■ Hipoteza sformułowana przez uczniów:

1. Prawdopodobnie uczniowie mogą stwierdzić, że mierniczy wykonali swoją pracę poprawnie lub że ich pomysł jest niepoprawny (w skrócie hipotezy brzmiałyby: TAK lub NIE).

## DOŚWIADCZENIE



### ■ Zmienne występujące w doświadczeniu:

- zmienna niezależna: wielkość (wymiary) figur podobnych – na mapie i w rzeczywistości,
- zmienna zależna: pola figur podobnych – na mapie i w rzeczywistości,
- zmienna kontrolna: uznajemy za prawidłowy kształt określony przez geodetów.

### ■ Instrukcja wykonania doświadczenia:

Pan Michał kupił piękną, płaską działkę rekreacyjną o kształcie zbliżonym do prostokąta. Na działce znajduje się altanka. Mierniczy obmierzyli brzegi działki, by obliczyć pole i ustalić jaki podatek

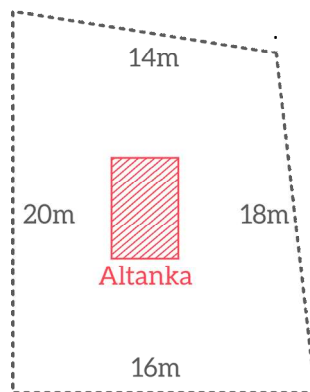


powinien być płacony. Pan Michał, przyglądając się pomiarom, zgłosił wątpliwości, czy aby poprawnie udało się wyznaczyć pole. Mierniczy przedstawili mu uzasadnienie:

Średnia długość działki: 19 m

Średnia szerokość działki: 15 m

$$Pd = 19 \times 15 = 190 + 95 = 285 \text{ m}^2$$



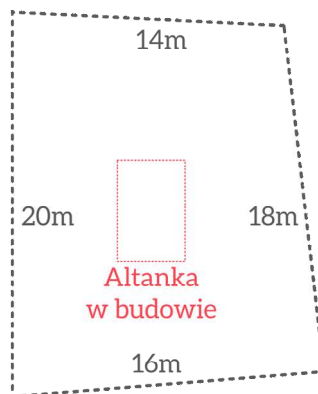
Plan działki nr 225. Właściciel: Michał Kowalski. Ul. Drzymały 3/21; 16 - 251 Kowalewo Górne. Sporządzili w imieniu POD „Pod Dębami” mierniczy: Z. Nowak i J. Wiśniewski.

### Zadanie A

Zapoznaj się z uzasadnieniem mierniczych i postaw swoją hipotezę – przewidywaną odpowiedź na pytanie badawcze: Czy mierniczy dobrze określili pole powierzchni działki Pana Michała?

Pan Michał przekonywał mierniczych, że czworokąty o danych bokach mogą mieć różne kształty, a tym samym różne pola i zaproponował zmierzenie jeszcze przekątnej tego czworokąta, bo trójkąt o danych bokach ma kształt określony jednoznacznie. Problem polegał jednak na tym, że w wymierzeniu przekątnej przeszkadzała altanka i strony pozostały przy swych stanowiskach. Pan Michał nie dał jednak za wygraną. Postanowił skorzystać z planu działek - dostępnym w domu działkowca. Rzeczywiście kształt jego działki wykonany przez geodetów nieco się różnił od tego, który przedstawili mu mierniczy, choć boki miały te samą długość. Oto dokładny plan działki:





### Zadanie B

W celu zweryfikowania własnej hipotezy powtórz plan badania zastosowany przez pana Michała. Oto on:

Tak postanowiłem sprawdzić czy mam rację:

1. Zmierzyć najdłuższy bok w terenie i na planie, by ustalić skalę podobieństwa: działki i planu (tzn. skalę mapy, bo nie pisze nic na ten temat).
2. Podzielić plan na dwa trójkąty o wspólnej podstawie, rysując jedną z przekątnych.
3. Narysować wysokości opuszczone na wspólną podstawę w każdym z trójkątów.
4. Zmierzyć podstawę i każdą wysokość z dokładnością do 1 mm.
5. Obliczyć pola każdego z trójkątów wg wzoru:  $P_{\triangle} = 1/2ah$ , gdzie a- to długość podstawy, zaś h – to długość wysokości.
6. Dodać pola dwóch trójkątów, by obliczyć pole działki na planie.
7. Powiększyć pola do rzeczywistych wartości (tu wykorzystać obliczoną skalę).
8. Sprawdzić, czy obliczone pole znacząco różni się od wyliczeń mierniczych (więcej niż od 1 m<sup>2</sup>).

Podpisano: Michał Kowalski.

### Podsumowania doświadczenia:

Podsumowanie doświadczenia ma kluczowe znaczenie dla realizacji celów. Dlatego uważam za konieczne wykorzystanie w podsumowaniu następujących uwag i wskazań:





1. Instrukcję zaplanowano tak, by nie powiększać najpierw wymiarów liniowych, ale zmusić uczniów do podjęcia samodzielnej decyzji jak ustalić pole działki wykorzystując pole uzyskane z pomiarów na planie i skalę wyznaczoną w punkcie 1. (sprawdzić czy nie istnieje potrzeba omówienia jak to konkretnie zrobić). Istnieje spore prawdopodobieństwo, że niektórzy uczniowie powiększą pole tylko wykorzystując krotność skali. W samodzielnym odkryciu, że Stosunek pól figur podobnych równy jest kwadratowi skali podobieństwa, warto wykorzystać następujące możliwości, które okażą się dostępne:
  - Możliwość poprawnego ustalenia pola przez uczniów – wówczas należy poprosić ich o wyjaśnienie dlaczego taki wynik otrzymali i doprowadzić do klaryfikacji tego uzasadnienia. Można też, w tym celu zorganizować pracę w podgrupach; w każdej musi się znaleźć choć jeden uczeń, któremu udało się poprawnie określić pole i jego zadaniem będzie wyjaśnienie innym. Wspólna klaryfikacja nastąpić powinna dopiero po tym etapie.
  - Spostrzeżenie, że otrzymany wynik bardzo różni się (około  $k$  - krotnie) od ustaleń mierniczych – doprowadzić wówczas do odkrycia dlaczego – raczej tę część prowadzi nauczyciel
  - Można wykorzystać do analizy w punkcie 2. przykład z klasycznym prostokątem tak, jak to np. zaproponowano w podręczniku: Matematyka 3. Podręcznik dla gimnazjum. Wydanie 2011. Praca zbiorowa pod redakcją M. Dobrowolskiej.
2. Niezwykle istotną częścią badań będzie dyskusja błędu pomiaru nawiązująca do problemu oszacowań. Załóżmy, że otrzymane pole jest nieznacznie mniejsze od otrzymanego przez mierniczych. Co okazałoby się, gdybyśmy przyjęli odczyt podstawy i obydwu wysokości o milimetr dłuższy (dlaczego taka możliwość?). Analogiczna analiza w przypadku otrzymania nieco większego wyniku z pomiarów. Należy także uwzględnić w dyskusji ocenę uczniów, którzy dokonali odmiennego wyboru przekątnej (podstawy trójkątów).
3. Można zaproponować uczniom, jako kontynuację badań, wymyślenie doświadczenia, w którym kształt czworokąta, byłby zmienną niezależną, pole – zmienna zależną, a długości boków zmienna kontrolną. W szczególności problemem do obmyślenia byłoby zbudowanie (konstrukcyjnie) modelu czworokąta, który posłużyłby do badań.



**Propozycja dokumentacji przeprowadzenia doświadczenia przez uczniów**

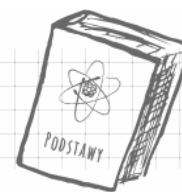
1. Pomiary i obliczenia proponuję wpisać do tabeli pomiarowej np. wg wzoru przedstawionego poniżej:

| wymiary               | boki czworokąta |      |      |      | Przekątna<br>(wspólna<br>podstawa<br>trójkątów) | Wysokość<br>$h_1$                     | Wysokość<br>$h_2$ | $P_{\Delta 1}$ | $P_{\Delta 2}$ | $P_d =$<br>$P_{\Delta 1} + P_{\Delta 2}$ |
|-----------------------|-----------------|------|------|------|---|---------------------------------------|-------------------|----------------|----------------|--|
| rzeczywiste<br>(m)    | 20 m            | 18 m | 16 m | 14 m |   |                                       |                   |                |                |  |
| na planie (cm)        |                 |      |      |      |   |                                       |                   |                |                |  |
| skala<br>podobieństwa |                 |      |      |      | Wzór na pole trójkąta                           | $P_{\Delta} = \frac{1}{2} a \times h$ |                   |                |                |  |

2. Dokumentacja powinna zawierać rysunek z wykreśloną przekątną i wysokościami, by można było zweryfikować poprawność i ocenić, czy staranność wykonania nie wpłynęła na wynik doświadczenia.
3. Można posłużyć się kartą pracy według wzoru Au – dla doświadczeń, które nie są grą.
4. Bezpośrednio w karcie zaplanować miejsca na obliczenia.



## PODSTAWA PROGRAMOWA



■ Cele, które zostaną osiągnięte w wyniku przeprowadzenia doświadczenia przez nauczyciela i uczniów pod kierunkiem nauczyciela:

### a) wymagania ogólne – cele

- II Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji: uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretuje pojęcia matematyczne i operuje obiektami matematycznymi.
- III Modelowanie matematyczne: uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji, buduje model matematyczny danej sytuacji.
- IV Użycie i tworzenie strategii: uczeń stosuje strategię jasno wynikającą z treści zadania, tworzy strategię rozwiązania problemu.
- V Rozumowanie i argumentacja: uczeń prowadzi proste rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania.

### b) wymagania szczegółowe - treści nauczania

- 10 Figury płaskie: 9) uczeń oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów; 10) zamienia jednostki pola; 11) oblicza wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali; 12) oblicza stosunek pól wielokątów podobnych;
- 1 Liczby wymierne dodatnie: 6) uczeń szacuje wartości wyrażeń arytmetycznych;

## BIBLIOGRAFIA



Proponuję, jako wystarczające źródło wiedzy - możliwe do wykorzystania przez uczniów i ewentualnie nauczyciela dowolny podręcznik matematyki do gimnazjum traktujący o podobieństwie figur np.:

1. Matematyka 3. Podręcznik dla gimnazjum. Wydanie 2011. Praca zbiorowa pod redakcją M. Dobrowolskiej.