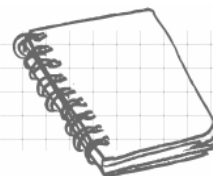




Konstrukcja odcinków niewymiernych z wykorzystaniem

Twierdzenia Pitagorasa.

WIADOMOŚCI OGÓLNE



■ Czas trwania zajęć: ok. 40 minut + 5 minut na wykład

■ Kontekst w jakim wprowadzono doświadczenie:

Doświadczenie warto zrealizować w klasie drugiej lub trzeciej, gdy uczniowie mają utrwaloną wiedzę dotyczącą trójkątów prostokątnych.

■ Potencjalne pytania badawcze:

1. Jak można konstruować odcinki o długości wyrażonej liczbą niewymierną (postaci \sqrt{n} , gdzie n jest liczbą naturalną, ale nie jest kwadratem innej liczby naturalnej), mając do dyspozycji wyłącznie odcinki o długościach wymiernych?

■ Określenie wiedzy i umiejętności wymaganej u uczniów przed przystąpieniem do realizacji zajęć:

Uczniowie potrafią obliczać długości boków trójkątów prostokątnych w oparciu o twierdzenie Pitagorasa.

Jeśli uczniowie mają niewystarczającą wiedzę na temat liczb niewymiernych, warto doświadczenie poprzedzić np. krótkim, 5-cio minutowym wykładem nauczycielskim z uwzględnieniem rysu historycznego, dotyczącego odkrycia niewspółmierności – jako pierwiastków z liczb, które nie są kwadratami liczb wymiernych. Należy (ponownie) zadbać, by nie utrwaliło się przekonanie, że tylko tego typu liczby mogą być niewmierne (np. przez przypomnienie liczby π).

▣ Cele osiągnięte z wykorzystaniem doświadczenia:

1. nauczyciela:

- zapoznanie uczniów ze sposobem konstruowania odcinków o długościach wyrażonych liczbą niewymierną z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa,
- kształcenie umiejętności dobierania właściwego modelu uzasadniającego poprawność konstrukcji.

2. uczniów:

- będziesz umiał konstruować wiele odcinków o długościach niewymiernych wykorzystując twierdzenie Pitagorasa.

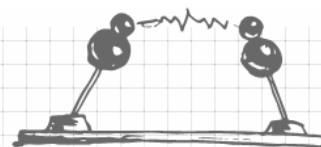
▣ Pojęcia kluczowe:

- odcinki o długościach niewymiernych,
- twierdzenie Pitagorasa,
- symetralna odcinka.

▣ Hipoteza sformułowana przez uczniów:

1. Naturalna hipoteza nr 1 brzmi: Z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.
2. Hipoteza nr 2 to najprawdopodobniej: „TAK” lub „NIE”.

DOŚWIADCZENIE



▣ Zmienne występujące w doświadczeniu:

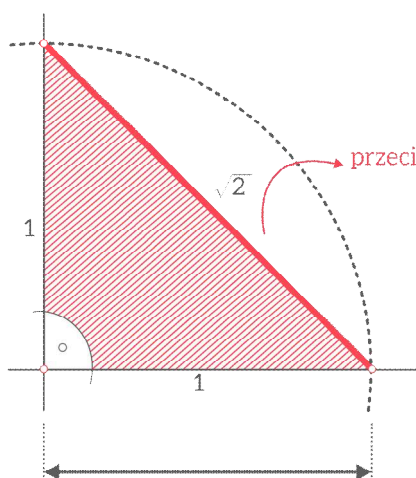
- zmienna niezależna: niewymierna długości odcinka - boku trójkąta prostokątnego,
- zmienna zależna: długości pozostałych dwóch boków pozwalających taki odcinek uzyskać,
- zmienna kontrolna: sposób obliczenia długości boku trzeciego – uzasadniający sposób konstrukcji (w oparciu o twierdzenie Pitagorasa).

▣ Instrukcja wykonania doświadczenia:

W przypadku wykonywania konstrukcji na komputerze uczniowie mogą cały czas pracować w parach.

Zadanie A

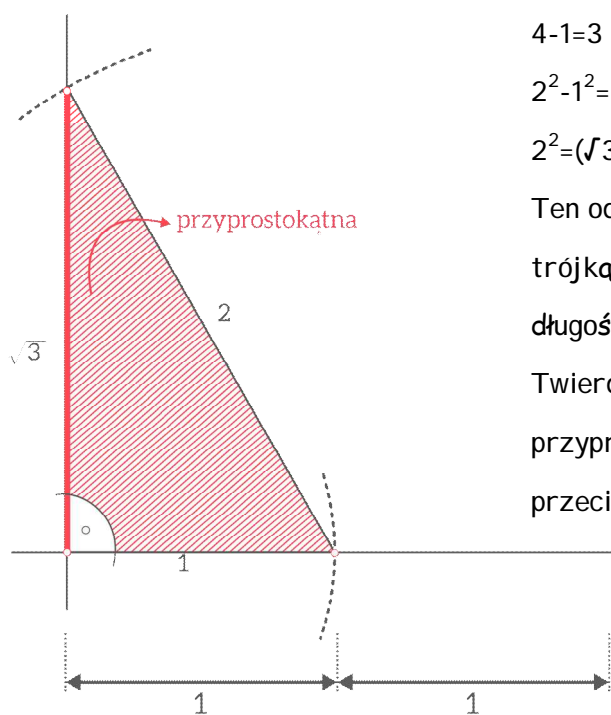
1. Zapoznajcie się ze sposobem konstrukcji odcinków o długościach niewymiernych $\sqrt{2}$ oraz $\sqrt{3}$.
Przedyskutujcie w parach jak należy wykonać każdą z konstrukcji.



$$1+1=2$$

$$1^2+1^2=(\sqrt{2})^2$$

Ten odcinek skonstruowano jako przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o dwóch przyprostokątnych długości 1, bo wg Twierdzenia Pitagorasa suma kwadratów długości przyprostokątnych równa jest kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



$$4-1=3$$

$$2^2-1^2=(\sqrt{3})^2$$

$$2^2=(\sqrt{3})^2+1^2$$

Ten odcinek skonstruowano jako przyprostokątną trójkąta prostokątnego o drugiej przyprostokątnej długości 1 i przeciwprostokątnej długości 2, bo wg Twierdzenia Pitagorasa suma kwadratów długości przyprostokątnych równa jest kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



(tu warto zaplanować stopklatkę, by sprawdzić czy wszyscy uczniowie dobrze zrozumieli ideę konstrukcji – odsłuchujemy minimum po jednym wyjaśnieniu dla każdego odcinka, prosimy o korektę pozostałych uczniów)

- Przeczytajcie pytanie badawcze/problemowe. Postawcie indywidualnie swoją hipotezę i zapiszcie ją wraz z pytaniem badawczym/problemowym – każdy w swoim w zeszycie.
- Wykonajcie teraz konstrukcję odcinka o długości $\sqrt{5}$ jako przyprostokątną lub przeciwprostokątną wykorzystując jedną z poniżej przedstawionych możliwości (praca w parach po uprzednim omówieniu każdej koncepcji – minimum należy odsłuchać propozycje kolejnych kroków konstrukcyjnych):

$$1+4=5$$

$$9-4=5$$

$$1^2+2^2=(\sqrt{5})^2$$

lub

$$3^2-2^2=(\sqrt{5})^2$$

$$3^2=(\sqrt{5})^2+2^2$$

Konstrukcję możecie także wykonać na komputerze.

(po zakończeniu zadania – stopklatka; pokazanie poprawnej konstrukcji dla każdej wersji, wyjaśnienie dodatkowych wątpliwości uczniów)

- W zespołach czteroosobowych spróbujcie znaleźć sposób na skonstruowanie odcinka o długości $\sqrt{6}$ z wykorzystaniem Twierdzenia Pitagorasa. (Podpowiedź: spróbujcie zapisać liczbę 6 jako sumę kwadratów lub różnicę kwadratów dwóch liczb wymiernych). Po trzech minutach przedstawicie rezultat waszej pracy.

(tu stosujemy kolejną stopklatkę i omawiamy wyniki poszukiwań, a najprawdopodobniej – ich brak; następnie przeformułujemy (formułujemy nowe) pytanie badawcze/problemowe: Czy każdy odcinek o długości wyrażonej liczbą niewymierną można skonstruować w sposób przedstawiony w instrukcji?)

- Sformułujcie kolejną hipotezę nr 2. Zapiszcie pytanie badawcze/problemowe i hipotezę nr 2 w zeszycie.
- Nie zawsze jest łatwo wymyślić jak liczbę „nie kwadratową” przedstawić w postaci sumy lub różnicy kwadratów dwóch innych liczb naturalnych. Czasem się tego po prostu nie da zrobić. Czy zatem matematyka jest wobec takich liczb „bezsilna”?





Zapoznajcie się z wynikiem badań Basi, która wymyśliła „sposób” na $\sqrt{6}$.

OPIS POMYSŁU BASI.

Po długich, bezskutecznych poszukiwaniach sposobu na skonstruowanie odcinka $\sqrt{6}$ odkryłam, że bez trudu umiem skonstruować odcinek dwa razy dłuższy. Wystarczy później podzielić ten odcinek na połowę:

$$2 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2^2 \cdot 6} = \sqrt{2^2 \cdot 6} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24}$$

$$24 = 25 - 1$$

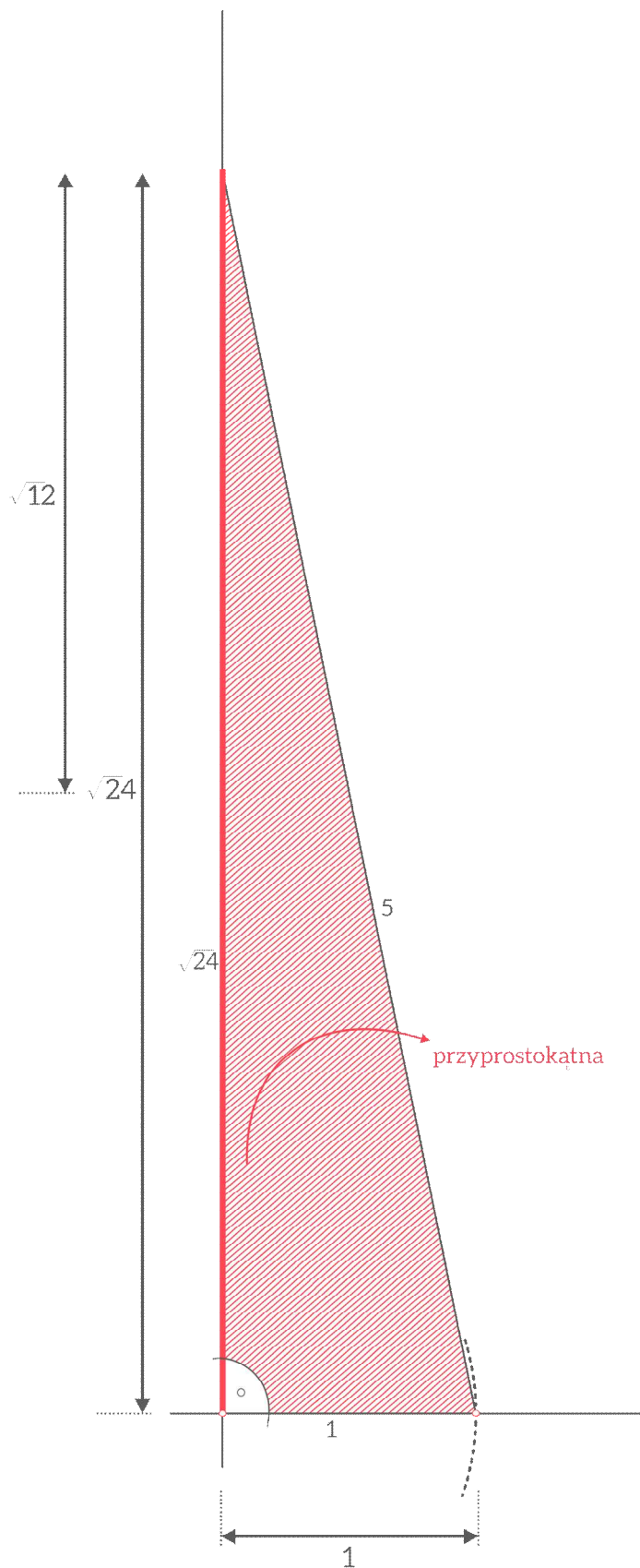
$$24 + 1 = 25$$

$$(\sqrt{24})^2 + 1^2 = 5^2$$

Wniosek Basi:

Odcinek o niewymiernej długości $\sqrt{24}$ powstanie jako przyprostokątna, gdy druga przyprostokątna ma długość 1, a przeciwprostokątna ma długość 5. Odcinek o długości $\sqrt{6}$ otrzymamy dzieląc $\sqrt{24}$ na połowę (symetralną).







7. Jeśli wystarczy nam czasu, możemy polecić parom wykonanie konstrukcji wg pomysłu Basi lub od razu przejść do podsumowania końcowego:

W tym miejscu podsumowujemy uzyskane wyniki doświadczenia. Warto, by uczniowie poznali jaki jest ich aktualny pogląd na rozwiązanie problemu (inventaryzacja ilościowa hipotezy nr 2). Można także wykorzystać poniższą listę wyboru, za pomocą której uczniowie dokonają samooceny swej aktualnej wiedzy i umiejętności oraz przekażą nauczycielowi I Z o realizacji celów doświadczenia:

- Potrafię wymyślić sposób na konstruowanie wielu odcinków wymiernych.
- Sądzę, że wszystkie odcinki \sqrt{n} typu można skonstruować z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa lub przez podział uzyskanych tym sposobem odcinków na równe części, albo ich zwielokrotnianie.
- Nie jestem pewien, czy wszystkie odcinki \sqrt{n} typu można skonstruować z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa lub przez podział uzyskanych tym sposobem odcinków na równe części, albo ich zwielokrotnianie.
- Chciałbym poznać ostateczną odpowiedź na pytanie badawcze – podjąć dalsze badania.

Ponieważ celem doświadczenia nie jest uzyskanie przepisu (algorytmu) dla każdego możliwego przypadku, powinno pojawić się naturalne zapotrzebowanie na kontynuację badań. Pracę domową proponuję zatem sformułować wariantowo – uczniowie wybierają konstrukcję, która chcą zrobić: odcinka, gdy sposób jest łatwo wymyślić np. $\sqrt{10}$,

trudniejszego do wymyślenia np. $\sqrt{11}$

lub jeszcze trudniejszego np. $\sqrt{54}$.

■ Podsumowania doświadczenia:

Doświadczenie jest kilkietapowe, dlatego bezpośrednio w instrukcji przedstawiłem propozycję niezbędnych podsumowań częściowych tzw. stopklatki oraz propozycję podsumowania końcowego.

■ Propozycja dokumentacji przeprowadzenia doświadczenia przez uczniów

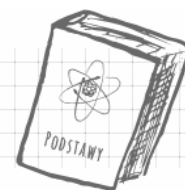
Dokumentacja doświadczenia przeprowadzonego przez uczniów powinna zawierać:





1. Konstrukcję wykonaną klasycznie lub komputerowo (tu do wyboru programy umożliwiające wykonanie takiej konstrukcji: C.a.R., GeoGebra, Cabri...).
2. Uzasadnienie arytmetyczne poprawności konstrukcji w oparciu o Twierdzenie Pitagorasa (uczniowie dołączają właściwe - w zależności od wyboru sposobu konstrukcji)
3. Informację słowną czy odcinek $\sqrt{5}$ powstanie jako przyprostokątna, czy przeciwprostokątną.
4. Jeśli wykonamy punkt 7 instrukcji, należy konstrukcyjnie podzielić odcinek o długości $\sqrt{24}$ na dwie części, podpisując długość połowy jako $\sqrt{6}$.

PODSTAWA PROGRAMOWA



- Cele, które zostaną osiągnięte w wyniku przeprowadzenia doświadczenia przez nauczyciela i uczniów pod kierunkiem nauczyciela:

a) *wymagania ogólne - cele*

- II Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji: uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretuje pojęcia matematyczne i operuje obiektami matematycznymi.
- III Modelowanie matematyczne: uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji, buduje model matematyczny danej sytuacji.
- V Rozumowanie i argumentacja: uczeń prowadzi proste rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania

b) *wymagania szczegółowe - treści nauczania*

- 3 Potęgi: 1) uczeń oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych;
- 4 Pierwiastki: 1) uczeń oblicza wartości pierwiastków drugiego i trzeciego stopnia z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześciانami liczb wymiernych;
- 10 Figury płaskie: 7) uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa;





BIBLIOGRAFIA



Tematykę związaną z twierdzeniem Pitagorasa uczniowie znajdą w każdym podręczniku matematyki np.

1. Matematyka 2. Podręcznik dla gimnazjum. Wydanie 2010. Praca zbiorowa pod redakcją M. Dobrowolskiej.

Informację o historii odkryć liczb niewymiernych znaleźć można np. w Wikipedii:

2. http://pl.wikipedia.org/wiki/Liczby_niewymierne

i pogłębiać ją korzystając z systemu kolejnych odsyłaczy. Proponuję także klasyczną lekturę:

3. „Śladami Pitagorasa” – Szczepana Jeleńskiego, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych 1961, lub nowsze WSiP, Warszawa 1974.

